ПІФАГОР

БОНУС ДО СТАТТІ

# Ділення на нуль: хто це заборонив і чому математика тут ні до чого?

Практичний путівник для учнів, батьків і вчителів: пояснення без «душності», цікавинки з історії та IT, фрази для уроку, міні-тест і словничок у двох рівнях складності.

**4**
розділи

**8**
цікавинок

**10**
завдань з відповідями

ШКОЛА ПІФАГОР · МАТЕМАТИКА

ЗАПИСАТИСЯ НА ДІАГНОСТИКУ

ВСТУП

# Не «заборонено», а «не визначено»

Фраза «на нуль ділити не можна» звучить як правило з кодексу: хтось заборонив — ми слухаємось. Але математика не встановлює заборон. Вона визначає операції в межах певної системи чисел. У звичайній арифметиці — і в дійсних, і в комплексних числах — ділення на нуль просто не має визначеного результату. І для цього є чітка математична причина, яку може зрозуміти навіть п'ятикласник.

**ГОЛОВНА ДУМКА ПУТІВНИКА**

Замість «На нуль ділити не можна!» кажіть: «У звичайній арифметиці ділення на нуль не визначене. І ось чому...» Мета математики — не завчити відповідь, а розуміти, чому вона правильна.

---

## Як працювати з путівником

| # | РОЗДІЛ | ДЛЯ КОГО І НАВІЩО |
|---|---|---|
| I | **Розбираємось у суті** | Для учнів і батьків: чому немає відповіді для 12 : 0 і чому 0 : 0 — зовсім інша історія |
| II | **Цікавинки про нуль** | Історія нуля, «доведення», що 2 = 1, і що роблять калькулятори та комп'ютери |
| III | **Гайд для дорослих** | Як пояснювати дитині різного віку, які фрази обрати і які помилки найчастіші |
| IV | **Перевір себе** | Міні-тест із відповідями та словничок термінів у двох версіях: «просто» і «строго» |

**ПОРАДА**

Розділ I найкраще проходити разом: дорослий читає запитання, дитина пробує відповісти сама. Так правило перестає бути фразою для запам'ятовування і стає власним відкриттям.

РОЗДІЛ І

# Розбираємось у суті: ділення — це запитання до множення



Щоб зрозуміти, що відбувається з нулем, досить пригадати, що взагалі означає ділення. Далі — логіка, яку легко перевірити самостійно.


1. Ділення через множення: перевірка за 3 кроки
2. Два різні випадки: a : 0 і 0 : 0
3. «А я чув, що можна!» — про границі та нескінченність

РОЗДІЛ I · 1

# Ділення через множення: перевірка за 3 кроки

Ділення відповідає на одне запитання: яке число треба помножити на дільник, щоб отримати ділене? Наприклад, **12 : 3 = 4**, бо **3 · 4 = 12**. Спробуймо застосувати ту саму логіку до нуля.

| # | КРОК | ЩО РОБИМО |
|---|---|---|
| 1 | **Записуємо приклад** | Припустимо, що **12 : 0 = x** — тобто існує якесь число x |
| 2 | **Переписуємо через множення** | Тоді мало б виконуватися **0 · x = 12** |
| 3 | **Перевіряємо** | Нуль, помножений на будь-яке число, дає нуль. Отримати 12 неможливо — отже, такого x не існує |

## Два різні випадки

А тепер найцікавіше: для **0 : 0** логіка дає зовсім інший результат.

**12 : 3 = 4**

Є рівно одне число: 3 · 4 = 12. Частка визначена

**12 : 0 = ?**

0 · x = 12 — не підходить жодне число. Відповіді немає

**0 : 0 = ?**

0 · x = 0 — підходить будь-яке число. Єдиної відповіді немає

**ВАЖЛИВО**

В обох випадках частка не визначена, але причини протилежні: для a : 0 (де a ≠ 0) розв'язків нуль, а для 0 : 0 — безліч. І ні, це не означає, що 0 : 0 «дорівнює всім числам одночасно» — стати мільйонером, поділивши нуль на нуль, не вийде.

РОЗДІЛ І · 3

# «А я чув, що на нуль таки можна ділити!»

Частково — так: у вищій математиці є конструкції зі спеціальними правилами. Але вони не роблять ділення на нуль звичайною арифметичною дією. Подивімось, що відбувається з виразом **1 : x**, коли x наближається до нуля.

| X СПРАВА ВІД НУЛЯ | 1 : X | X ЗЛІВА ВІД НУЛЯ | 1 : X |
|---|---|---|---|
| **0,1** | **10** | **−0,1** | **−10** |
| **0,01** | **100** | **−0,01** | **−100** |
| **0,001** | **1 000** | **−0,001** | **−1 000** |
| **0,000001** | **1 000 000** | **−0,000001** | **−1 000 000** |
| прямує до 0 | **→ +∞** | прямує до 0 | **→ −∞** |

Справа значення необмежено зростають, зліва — необмежено спадають. Два протилежні результати залежно від напрямку означають, що двосторонньої границі не існує. І зверніть увагу: x весь час залишається відмінним від нуля — ми досліджуємо поведінку виразу *поблизу* нуля, а не *в* нулі.

| КОНСТРУКЦІЯ | ЩО ТАМ ВІДБУВАЄТЬСЯ З НУЛЕМ |
|---|---|
| **Розширена комплексна площина** | Додають особливу точку ∞ і для деяких дій вводять спеціальні правила. Але 0 : 0 і там не має значення |
| **Теорія кілець** | Вивчає структури з додаванням і множенням. Загального «дозволу» ділити на нуль вона не дає |
| **Границі** | Описують, куди прямує вираз біля точки. «Прямує до ∞» ≠ «дорівнює ∞» |

РОЗДІЛ II

# Цікавинки про нуль, які варто розповісти за вечерею



Нуль — одне з наймолодших чисел в історії людства. Його шлях до підручників був довгим, а ділення на нього досі ламає калькулятори й комп'ютерні програми.

1. Коротка історія нуля
2. «Доведення», що 2 = 1: знайдіть помилку
3. Що роблять калькулятори, таблиці й комп'ютери

РОЗДІЛ II · 1

# Коротка історія нуля

Люди тисячоліттями рахували без нуля. Ідея «числа, що означає нічого» виявилась настільки незвичною, що математики сперечалися про неї століттями.

| КОЛИ | ЩО СТАЛОСЯ |
|---|---|
| **Стародавній Вавилон** | У записах чисел з'являється спеціальний знак-«заглушка» для порожнього розряду. Але самостійним числом він ще не був |
| **Цивілізація майя** | Незалежно від Старого світу майя використовують знак нуля у своєму календарі та системі числення |
| **628 рік, Індія** | Математик Брахмагупта вперше описує правила дій з нулем як з числом. Він вважав, що 0 : 0 = 0 — сьогодні ми знаємо, що це не так |
| **XII століття, Індія** | Бхаскара II стверджував, що число, поділене на нуль, дає нескінченність. Ідея близька до границь, але як рівність — хибна |
| **XIII століття, Європа** | Фібоначчі популяризує в Європі індійсько-арабські цифри разом із нулем. Їх приймали повільно й з недовірою |
| **XVII–XIX століття** | Розвиток математичного аналізу та поняття границі дає точну мову, щоб говорити про «наближення до нуля» |

**ЦІКАВИЙ ФАКТ**

Навіть великі математики помилялися щодо ділення на нуль. Це гарний аргумент для учнів: складне питання — не привід соромитися, а привід розібратися.

РОЗДІЛ II · 2

# «Доведення», що 2 = 1: знайдіть помилку

Класична математична пастка. Кожен крок виглядає законним — але десь заховане ділення на нуль. Спробуйте знайти його, перш ніж дивитися відповідь.

| # | ЗАПИС | ЩО ЗРОБИЛИ |
|---|---|---|
| 1 | **$a = b$** | Беремо два однакові числа |
| 2 | **$a^2 = ab$** | Помножили обидві частини на a |
| 3 | **$a^2 - b^2 = ab - b^2$** | Відняли $b^2$ з обох частин |
| 4 | **$(a + b)(a - b) = b(a - b)$** | Розклали обидві частини на множники |
| 5 | **$a + b = b$** | Скоротили на $(a - b)$ |
| 6 | **$2b = b$** | Підставили $a = b$ |
| 7 | **$2 = 1$** | Поділили на b. «Доведено»? |

**ВІДПОВІДЬ**

Помилка в кроці 5. Оскільки $a = b$, вираз $(a - b)$ дорівнює нулю. «Скоротити на $(a - b)$» означає поділити обидві частини на нуль — а така дія не визначена. Саме тому вчителі так наполягають на умові «знаменник не дорівнює нулю» в алгебрі.

**ДЛЯ УРОКУ ЧИ ВЕЧЕРІ**

Запропонуйте дитині знайти помилку самостійно. Це чудова вправа на уважність і найкраще пояснення, навіщо в алгебрі завжди записують ОДЗ — область допустимих значень.

РОЗДІЛ II · 3

# Що роблять калькулятори, таблиці й комп'ютери

Техніка не «знає» відповіді на ділення на нуль — вона лише по-різному повідомляє, що результату немає. Перевірте самі разом із дитиною.

| ДЕ | ЩО ПОБАЧИТЕ |
|---|---|
| **Звичайний калькулятор** | «Error», «E» або «Не можна ділити на нуль» — пристрій просто відмовляється рахувати |
| **Excel / Google Таблиці** | Помилка **#DIV/0!** — у бухгалтерії це одна з найчастіших помилок у звітах |
| **Програмування (цілі числа)** | Багато мов програмування зупиняють програму з помилкою «division by zero» |
| **Програмування (дробові числа)** | За стандартом обчислень IEEE 754 результат 1 : 0 позначається як Infinity, а 0 : 0 — як NaN («не число»). Це технічні позначки, а не математичні відповіді |

**РЕАЛЬНА ІСТОРІЯ**

У 1997 році на американському ракетному крейсері USS Yorktown оператор ввів нуль у поле бази даних. Програма спробувала поділити на нього, і збій поширився мережею корабля — силова установка зупинилась, і крейсер на кілька годин втратив хід. Ціна однієї необробленої помилки ділення на нуль.

**ВИСНОВОК ДЛЯ УЧНІВ**

Програмісти щодня пишуть перевірки «якщо дільник дорівнює нулю — ...». Розуміння цієї теми — не шкільна формальність, а базова навичка в IT.

РОЗДІЛ III

# Гайд для батьків і вчителів: як пояснювати без заборон



Правильне формулювання — це не прискіпливість, а різниця між «завчив» і «зрозумів». Ось інструменти для розмови з дитиною будь-якого віку.

1. Фрази-замінники: що казати замість «не можна»
2. Як пояснити за віком: 1–4, 5–9, 10–11 клас
3. Типові помилки учнів і як їх попередити

РОЗДІЛ III · 1

# Що казати замість «на нуль ділити не можна»

Точне формулювання не підміняє математичний факт уявною забороною і запрошує дитину подумати.

| ЗАМІСТЬ | КРАЩЕ СКАЗАТИ |
|---|---|
| «На нуль ділити не можна!» | «У звичайній арифметиці ділення на нуль не визначене. Давай перевіримо чому» |
| «Так заведено, просто запам'ятай» | «Яке число треба помножити на нуль, щоб отримати 12? Спробуй знайти» |
| «Буде нескінченність» | «Якщо ділити на числа, дуже близькі до нуля, результат стає дедалі більшим. Але сам нуль — інша історія» |
| «0 : 0 теж не можна, це те саме» | «Тут причина інша: підходить будь-яке число, тому немає однієї відповіді» |
| «Це тобі ще рано знати» | «Добре запитання! Є навіть розділи вищої математики, де про це говорять окремо» |

**ПОРАДА ВЧИТЕЛЯМ**

Коли учень каже «а я чув, що можна», не обривайте його. Скажіть: «У певних конструкціях вводять спеціальні правила — але в нашій арифметиці частка не визначена». Цікавість — найкращий союзник математики.

РОЗДІЛ III · 2

# Як пояснити за віком

Одна й та сама ідея — три рівні глибини. Оберіть свій і не переходьте до наступного, поки попередній не став очевидним.

| ВІК | ПІДХІД | ЯК ЦЕ ЗВУЧИТЬ |
|---|---|---|
| **1–4 клас** | Ділення як розподіл | «У тебе 12 цукерок і 3 друзі — кожен отримає по 4. А якщо друзів нуль? Кому ти даси цукерки і скільки кожному? Питання втрачає сенс — тому й відповіді немає» |
| **5–9 клас** | Ділення як обернене множення | «12 : 3 = 4, бо 3 · 4 = 12. Знайди число, яке після множення на 0 дасть 12. Не виходить? А для 0 : 0 підходить будь-яке — тому теж немає однієї відповіді» |
| **10–11 клас** | Границі та ОДЗ | «Подивись на 1 : x біля нуля: справа → +∞, зліва → −∞. Границі немає. Саме тому в рівняннях і функціях ми завжди виписуємо, що знаменник ≠ 0» |

## Міні-експеримент удома

| # | ЩО ЗРОБИТИ РАЗОМ |
|---|---|
| **1** | Візьміть калькулятор і по черзі поділіть 1 на 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001 — запишіть результати в стовпчик |
| **2** | Повторіть для −0,1; −0,01; −0,001 і порівняйте два стовпчики |
| **3** | Нарешті поділіть 1 на 0 і подивіться, що «скаже» калькулятор. Обговоріть, чому так |

РОЗДІЛ III · 3

# Типові помилки учнів

За дослідженнями в галузі математичної освіти, нуль — одне з найпідступніших чисел для школярів. Ось помилки, які зустрічаються найчастіше.

| ПОМИЛКА | ЯК НАСПРАВДІ |
|---|---|
| Плутати 0 : 5 і 5 : 0 | **0 : 5 = 0** — це нормальна дія, бо 5 · 0 = 0. А **5 : 0** не визначене |
| «5 : 0 = 0» | Перевірка множенням: 0 · 0 = 0, а не 5. Відповідь хибна |
| «5 : 0 = 5», бо «ділити на нуль — це не ділити» | Перевірка: 0 · 5 = 0, а не 5. Ділення на нуль ≠ «нічого не робити» |
| «5 : 0 = ∞» | Нескінченність — не число в звичайній арифметиці. Вираз прямує до ∞ лише в границях, і то з одного боку |
| Скорочувати дріб, не перевіривши знаменник | Скорочення на вираз, що може дорівнювати нулю, — це приховане ділення на нуль (див. «доведення» 2 = 1) |
| Забувати ОДЗ у рівняннях з дробами | Корінь, при якому знаменник дорівнює нулю, — сторонній. Його треба відкинути |

**УНІВЕРСАЛЬНИЙ ПРИЙОМ**

Навчіть дитину завжди перевіряти ділення множенням. Цей один прийом знімає більшість помилок із нулем — і не лише з ним.

РОЗДІЛ IV

# Перевір себе та словничок термінів



Закріплюємо розуміння: 10 завдань з відповідями і всі складні слова зі статті — у версії «просто» для учнів та «строго» для допитливих.


1. Міні-тест «Визначено чи ні?»
2. Словничок: «Ой як просто» vs «Строго»
3. Що почитати далі

РОЗДІЛ IV · 1

# Міні-тест «Визначено чи ні?»

Запишіть відповідь: число або «не визначено». Перевіряйте кожну множенням. Відповіді — внизу сторінки.

| # | ВИРАЗ | ВАША ВІДПОВІДЬ |
|---|---|---|
| 1 | **0 : 7** | |
| 2 | **7 : 0** | |
| 3 | **0 : 0** | |
| 4 | **(5 − 5) : 3** | |
| 5 | **3 : (5 − 5)** | |
| 6 | **0 · 1 000 000** | |
| 7 | **12 : (4 − 2 · 2)** | |
| 8 | **x : x, якщо x = 9** | |
| 9 | **x : x, якщо x = 0** | |
| 10 | При якому x вираз **1 : (x − 3)** не визначений? | |

**ВІДПОВІДІ**

1) 0 · 2) не визначено · 3) не визначено · 4) 0 · 5) не визначено · 6) 0 · 7) не визначено, бо 4 − 2 · 2 = 0 · 8) 1 · 9) не визначено · 10) x = 3

РОЗДІЛ IV · 2

# Словничок: «Ой як просто» vs «Строго»

Ліва колонка — для учнів і батьків, права — для тих, хто хоче точних формулювань.

| ТЕРМІН | ОЙ ЯК ПРОСТО | СТРОГО |
|---|---|---|
| **Дійсні числа $\mathbb{R}$** | Усі числа, які можна поставити точками на числовій прямій: 1, −2, ½, √2, π | Множина натуральних, цілих, раціональних та ірраціональних чисел |
| **Комплексні числа $\mathbb{C}$** | Числа виду 3 + 2i, де $i \cdot i = -1$. Дозволяють розв'язати $x^2 = -1$ | Числа $a + bi$, де $a, b \in \mathbb{R}$, $i^2 = -1$. Ділення на нуль тут теж не визначене |
| **Розширена комплексна площина** | Комплексні числа плюс одна особлива точка ∞ зі своїми правилами | $\mathbb{C}$, доповнена точкою ∞. Деякі операції з нею визначені, але 0/0 — ні |
| **Кільце** | Набір об'єктів, які можна додавати, віднімати й множити за правилами. Наприклад, цілі числа | Алгебраїчна структура з додаванням і множенням. Ділення в ній визначене не завжди |
| **Границя** | До чого наближається вираз, коли змінна наближається до числа | Описує поведінку функції біля точки; може існувати, навіть коли в самій точці функція не визначена |
| **ОДЗ** | Значення змінної, при яких вираз має сенс | Область допустимих значень: множина аргументів, для яких усі дії у виразі визначені |

## Що почитати далі


| | |
|---|---|
| 1 | Marecek L. та ін. *Intermediate Algebra 2e*. OpenStax, 2020 — розділ про властивості дійсних чисел (безкоштовно онлайн) |
| 2 | Strang G., Herman E. *Calculus. Volume 1*. OpenStax, 2016 — розділ про границю функції (безкоштовно онлайн) |
| 3 | Рудавський Ю. К. та ін. *Математичний аналіз*. Львів: Львівська політехніка, 2002 |
| 4 | Jankvist U. T., Niss M. *The naughty nought: students' difficulties with zero*. Mathematics Education Research Journal, 2025 |

ПІФАГОР

# Математика не забороняє — вона пояснює

Тепер ви знаєте не лише правило, а й причину. Наступного разу, коли хтось скаже «на нуль ділити не можна», ви зможете відповісти: «Не визначено — і ось чому...»



**Записатися на діагностику**